



RB-0761

Second Year B. Sc. Examination

April / May - 2010

Mathematics : Paper - III

(Old Course)

Time : 3 Hours]

[Total Marks : 105

સૂચના :

(૧)

નીચે દર્શાવેલ નિશાનીવાળી વિગતો ઉત્તરવહી પર અવશ્ય લખવી.  
Fillup strictly the details of signs on your answer book.

Name of the Examination :  
S.Y. B.Sc.

Name of the Subject :  
MATHEMATICS - 3 (OLD)

Subject Code No. : 0 7 6 1 Section No. (1, 2,.....) : NIL

Seat No. :

Student's Signature

- (૨) આ પ્રશ્નપત્રમાં કુલ છ પ્રશ્નો છે.  
(૩) બધા જ પ્રશ્નોનાં ઉત્તર આપો.  
(૪) સામાન્ય સંકેતોને અનુસરો.

૧ (અ) માગ્યા પ્રમાણે લખો :

૧૦

(૧) વિધેય  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ;  $(x, y) \neq (0, 0)$  માટે  $xf_x + yf_y$  ની કિંમત મેળવો.

(૨) કિંમત શોધો :  $\int_0^2 \int_0^4 (x^2 + y^2) dx dy$

(૩) વિધેય  $f(x) = \tan x$ ,  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  માટે વિસ્તાર શોધો.

(૪) સાબિત કરો કે શ્રેણી  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  નું લક્ષ 1 છે, જ્યાં  $S_n = 1$ .

(૫) શ્રેણી  $\left\{\sin \frac{n\pi}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$  નું સુપિરીયર લક્ષ શોધો.

(બ) નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

૫

- (૧) દ્વિયલ સમપરિમાણ વિધેયની વ્યાખ્યા આપો.  
(૨) 2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7,..... શ્રેણી માટે  $S_n$  નું સૂત્ર લખો.  
(૩) દોલનશીલ શ્રેણીની વ્યાખ્યા એક ઉદાહરણ સહિત આપો.  
(૪) દ્વિયલ વિધેયનાં લક્ષની વ્યાખ્યા આપો.  
(૫) ગણ્ય ગણની વ્યાખ્યા આપો.

- ૨ (અ) જો  $\phi(x)$  એ બિંદુ  $(a, \phi(a)) = (a, b)$  આગળ સતત હોય અને  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$  નું પણ અસ્તિત્વ છે અને જો તેની કિંમત  $l$  હોય તો સાબિત કરો કે  $\lim_{x \rightarrow a} f(x, \phi(x))$  નું પણ અસ્તિત્વ છે અને તેની કિંમત  $l$  છે.
- (બ) વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી  $f_x$  અને  $f_y$  ની કિંમત બિંદુ  $(x, y) = (2, 1)$  આગળ મેળવો.

$$\text{જ્યાં } f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}, \quad x+y \neq 0$$

$$= 0, \quad x+y = 0$$

- (ક) જો  $z(x+y) = x^2 + y^2$  હોય તો સાબિત કરો કે

$$\left( \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 4 \left( 1 - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

**અથવા**

- ૨ (અ) પ્રચલિત સંકેતોમાં સાબિત કરો કે  $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$
- (બ) જો  $u = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x+y}; x+y \neq 0$  હોય તો સાબિત કરો કે
- (૧)  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$
- (૨)  $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin 4u - \sin 2u$
- (ક) વિધેય  $f(x, y)$  નું બિંદુ  $(1, 1)$  આગળ સાતત્ય ચર્ચો.

$$\text{જ્યાં } f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x+y}, \quad x+y \neq 0$$

$$= 1, \quad x+y = 0$$

- ૩ (અ) દ્વિચલ વિધેયનાં આંત્રિક મૂલ્યો મેળવવા માટેની આવશ્યક શરત લખો અને સાબિત કરો.
- (બ) જો  $u_1 = \frac{x_2 x_3}{x_1}, u_2 = \frac{x_1 x_3}{x_2}, u_3 = \frac{x_1 x_2}{x_3}$  હોય તો સાબિત કરો કે
- $$J(u_1, u_2, u_3) = 4.$$

(ક) દર્શાવો કે  $e^{ax+by} = 1 + (ax+by) + \frac{(ax+by)^2}{2!} + \frac{(ax+by)^3}{3!} + \dots$  ૬

અથવા

૩ (અ) દ્વિચલ વિધેય માટે ટેયલરનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. ૬

(બ) વિધેય  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 5$  નાં આંત્યિક મૂલ્યો શોધો. ૬

(ક) જો  $x + y + z = u$ ,  $y + z = uv$ ,  $z = uvw$  હોય તો  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$  ૬  
મેળવો.

૪ (અ) જો  $f: A \rightarrow B$  અને  $X, Y \subset B$  હોય તો દર્શાવો કે ૬

$$f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$$

(બ) જો  $f(x) = \log x$ ;  $0 < x < \infty$  અને  $A = [1, 2]$ ;  $B = [0, 1]$  હોય તો ૬

$$f^{-1}(A), f^{-1}(B), f^{-1}(A \cup B), f^{-1}(A \cap B), f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

અને  $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$  શોધો.

(ક)  $f(x, y) = \frac{y^2}{x^3}$  નું  $(x-1)$  અને  $(y+1)$  ના દ્વિતીય ઘાત સુધીના ઘાતાંક ૬  
સ્વરૂપે વિસ્તરણ કરો.

અથવા

૪ (અ) જો  $A_1, A_2, A_3, \dots$  ગણ્ય ગણો હોય તો સાબિત કરો કે  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  ૬  
પણ ગણ્ય ગણ છે.

(બ)  $\iint_S (6-x-y) dx dy$  ની કિંમત શોધો જ્યાં ૬

$$S = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$$

(ક) દ્વિગુણી સંકલ  $\int_1^2 \int_{1/x}^x xy dx dy$  ની કિંમત ચલોનો ક્રમ બદલીને મેળવો. ૬

૫ (અ) જો શ્રેણીઓ  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  અને  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\infty$  ને અપસારી હોય તો સાબિત ૬

કરો કે  $\{S_n + t_n\}_{n=1}^{\infty}$  અને  $\{S_n t_n\}_{n=1}^{\infty}$  પણ  $\infty$  ને અપસારી છે.

(બ) પરવલયો  $y^2 = 4(3-x)$  અને  $y^2 - 4(x-1)$  વચ્ચે ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ૬

(ક) જો  $f: A \rightarrow B$  અને  $f$  નો વિસ્તાર અગણ્ય હોય તો સાબિત કરો કે  $f$  નો પ્રદેશ પણ અગણ્ય છે. ૬

અથવા

૫ (અ) સાબિત કરો કે ગણ  $[0, 1]$  અગણ્ય છે. ૬

(બ) જો વાસ્તવિક સંખ્યાઓની શ્રેણી  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  અભિસારી હોય તો સાબિત કરો કે સિમિત છે. ૬

(ક)  $N \in I^+$  એવા શોધો કે જેથી. ૬

$$n \geq N \Rightarrow \text{(i) } \left| \frac{2n}{n+3} - 2 \right| < \frac{1}{5} \quad \text{(ii) } \frac{1}{\sqrt{n+3}} < 0.03$$

૬ (અ) સિમિત શ્રેણીની વ્યાખ્યા આપો અને સાબિત કરો કે ઉર્ધ્વસિમિત વધતી શ્રેણી અભિસારી છે. ૬

(બ) જો વાસ્તવિક સંખ્યાઓની શ્રેણી  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $L \neq 0$  અભિસારી હોય તો સાબિત કરો કે  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_n} = \frac{1}{L}$ . ૬

(ક) જો  $n \in I$  માટે  $S_n = \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \right)$  હોય તો સાબિત કરો કે  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  અભિસારી છે. ૬

અથવા

૬ (અ) જો વાસ્તવિક સંખ્યાઓની શ્રેણી  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  અભિસારી હોય તો સાબિત કરો કે તે કોશી શ્રેણી છે. ૬

(બ) જો  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  વાસ્તવિક સંખ્યાઓની શ્રેણી હોય અને દરેક  $n \in I$  માટે ૬

$$\text{જો } S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \text{ અને } t_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

જો  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  કોશી શ્રેણી હોય તો સાબિત કરો કે શ્રેણી  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  પણ કોશી છે.

(ક) સાબિત કરો કે,  $\left\{ n - \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  નું લક્ષ અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી. ૬

## ENGLISH VERSION

- Instructions :** (1) As per the instruction no. 1 of page no. 1.  
(2) There are six questions in this question paper.  
(3) Answer all the questions.  
(4) Follow usual notations.

1 (a) Do as directed : 10

(1) Find the value of  $xf_x + yf_y$  for the function

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}; (x, y) \neq (0, 0).$$

(2) Evaluate :  $\int_0^2 \int_0^4 (x^2 + y^2) dx dy$ .

(3) Find the range of  $f(x) = \tan x, \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ .

(4) Prove that the sequence  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  where  $S_n = 1$  has a limit 1.

(5) Find limit superior of the sequence  $\left\{ \sin \frac{n\pi}{2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ .

(b) Answer the following questions : 5

- (1) Define homogeneous function of two variables.
- (2) Write a formula for  $S_n$  of 2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, .....
- (3) Define an oscillating sequence with one illustration.
- (4) Define limit of a bivariate function.
- (5) Define a countable set.

2 (a) Let  $\phi(x)$  be a continuous function at the point 6

$(a, \phi(a)) = (a, b)$  and  $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$  exists and if its value is  $l$  then prove that  $\lim_{x \rightarrow a} f(x, \phi(x))$  also exists and its value is  $l$ .

(b) Using definitions find  $f_x$  and  $f_y$  at the point 6

$$(x, y) = (2, 1) \text{ where } f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}, \quad x + y \neq 0 \\ = 0, \quad x + y = 0$$

- (c) If  $z(x+y) = x^2 + y^2$  then prove that 6

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 4\left(1 - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

**OR**

- 2 (a) In usual notations prove that 6

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

- (b) If  $u = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x+y}$ ;  $x+y \neq 0$  then prove that 6

$$(1) \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

$$(2) \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin 4u - \sin 2u$$

- (c) Discuss the continuity of  $f(x, y)$  at the point  $(1, 1)$  6

$$\text{where } f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x+y}, \quad x+y \neq 0$$

$$= 1, \quad x+y = 0$$

- 3 (a) State and prove necessary conditions for a bivariate function to have extreme values. 6

- (b) If  $u_1 = \frac{x_2 x_3}{x_1}$ ,  $u_2 = \frac{x_1 x_3}{x_2}$ ,  $u_3 = \frac{x_1 x_2}{x_3}$  then prove that 6

$$J(u_1, u_2, u_3) = 4.$$

- (b) Show that  $e^{ax+by} = 1 + (ax+by) + \frac{(ax+by)^2}{2!} + \frac{(ax+by)^3}{3!} + \dots$  6

**OR**

- 3 (a) State and prove Taylor's theorem for a bivariate function. 6

- (b) Find the extreme values of  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 5$ . 6

- (c) If  $x+y+z = u$ ,  $y+z = uv$ ,  $z = uvw$  then find  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ . 6

- 4 (a) If  $f: A \rightarrow B$  and  $X, Y \subset B$  then show that 6  
 $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$
- (b) If  $f(x) = \log x; 0 < x < \infty$  and taking  $A = [1, 2]; B = [0, 1]$  6  
 Find  $f^{-1}(A), f^{-1}(B), f^{-1}(A \cup B), f^{-1}(A \cap B), f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$   
 and  $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ .
- (c) Expand  $f(x, y) = \frac{y^2}{x^3}$  into the series expansion form 6  
 upto the second order terms in the powers of  $(x-1)$   
 and  $(y+1)$ .

**OR**

- 4 (a) If  $A_1, A_2, A_3, \dots$  are countable sets then prove that 6  
 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  is countable.
- (b) Evaluate  $\iint_S (6-x-y) dx dy$  where 6  
 $S = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$
- (c) Evaluate the double integral  $\int_1^2 \int_{1/x}^x xy dx dy$  after 6  
 changing the order of integration.
- 5 (a) If  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  and  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  are sequences of real 6  
 numbers that diverges to  $\infty$  then prove that  $\{S_n + t_n\}_{n=1}^{\infty}$   
 and  $\{S_n t_n\}_{n=1}^{\infty}$  also diverges to  $\infty$ .
- (b) Find the area enclosed between two parabolas 6  
 $y^2 = 4(3-x)$  and  $y^2 = 4(x-1)$ .
- (c) If  $f: A \rightarrow B$  and the range of  $f$  is uncountable 6  
 then prove that the domain of  $f$  is uncountable.

**OR**

- 5 (a) Prove that the set  $[0, 1]$  is uncountable. 6
- (b) If  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  is a convergent sequence of real numbers then prove that it is bounded. 6
- (c) Find  $N \in I^+$  such that 6
- $$n \geq N \Rightarrow \text{(i) } \left| \frac{2n}{n+3} - 2 \right| < \frac{1}{5} \quad \text{(ii) } \frac{1}{\sqrt{n+3}} < 0.03$$
- 6 (a) Define a bounded sequence and prove that a non-decreasing sequence which is bounded above is convergent. 6
- (b) If  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  is a sequence of real numbers which converges to  $L \neq 0$  then prove that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_n} = \frac{1}{L}$ . 6
- (c) For  $n \in I$  let  $S_n = \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \right)$  then prove 6
- that  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  is convergent.

OR

- 6 (a) If  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  is a convergent sequence of real numbers then prove that it is Cauchy. 6
- (b) Let  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  be a sequence of real numbers and for each  $n \in I$  let  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  and  $t_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$ . Then prove that if  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  is a Cauchy sequence then the sequence  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  is also Cauchy. 6
- (c) Prove that  $\left\{ n - \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  does not have a limit. 6